Economie industrielle
Correction de l'Interro n°2 - Groupe 1

Exercice 1 (CM)

Supposons deux firmes, disons F_1 et F_2, localisées dans deux nations (respectivement N_1 et N_2). F_1 et F_2 produisent un bien homogène. Les deux firmes se font concurrence en quantité. La firme $F_i, i \in \{1, 2\}$, produit une quantité q_i. La quantité totale produite par les deux firmes est notée Q.
Le prix du bien est noté p. Les firmes font face à la fonction de demande suivante :

$$Q = \alpha - p, \alpha \geq p > 0$$

Le coût de production de chaque firme $i \in \{1, 2\}$ est $c \times q_i$

1. Donner les fonctions de profit des firmes.

$Q = q_1 + q_2$. La fonction de demande inverse s'écrit : $p(q_1 + q_2) = \alpha - q_1 - q_2$
Le profit de la firme i s'écrit alors : $\pi_i(q_i, q_j) = p(q_i + q_j) \times q_i - c \times q_i$

$$\pi_1(q_1, q_2) = (\alpha - q_1 - q_2)q_1 - cq_1 = (\alpha - q_2 - c)q_1 - q_1^2$$
$$\pi_2(q_1, q_2) = (\alpha - q_1 - q_2)q_2 - cq_2 = (\alpha - q_1 - c)q_2 - q_2^2$$

2. Donner les meilleures réponses des firmes.

La meilleure réponse de la firme i, notée φ_i, s'obtient comme solution de la maximisation de la fonction de profit de la firme i en prenant comme donnée l'offre de la firme j : il s'agit de l'offre de la firme i en réponse à la quantité offerte de la firme j
- Firme 1 :

$$q_1 = \varphi_1(q_2) = \arg\max_{q_1}\{\pi_1(q_1, q_2) = (\alpha - q_2 - c)q_1 - q_1^2\}$$

La condition d'optimalité de 1^{er} ordre est : $\pi_1^{'}(q_1) = 0 \Longleftrightarrow (\alpha - q_2 - c) - 2q_1 = 0$
soit $q_1 = \varphi_1(q_2) = \dfrac{\alpha - q_2 - c}{2}$
On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'un maximum, puisque la condition d'optimalité de 2^{nd} ordre nous le confirme : $\pi_1^{''}(q_1) = -2 < 0$ ($\pi_1(q_1)$ est strictement concave en q_1).
- Firme 2 :

$$q_2 = \varphi_2(q_1) = \arg\max_{q_2}\{\pi_2(q_1, q_2) = (\alpha - q_1 - c)q_2 - q_2^2\}$$

La condition d'optimalité de 1^{er} ordre est : $\pi_2^{'}(q_2) = 0 \Longleftrightarrow (\alpha - q_1 - c) - 2q_2 = 0$
soit $q_2 = \varphi_2(q_1) = \dfrac{\alpha - q_1 - c}{2}$
Ici également, la condition d'optimalité de 2^{nd} ordre nous confirme que nous sommes en présence d'un maximum.

3. Trouvez l'équilibre de Cournot Nash.

Les deux firmes jouent leur meilleure réponse face à la meilleure réponse de leur concurrent :

$$\begin{cases} q_1 &= \frac{\alpha-q_2-c}{2} \\ q_2 &= \frac{\alpha-q_1-c}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} q_1 &= \frac{\alpha-\frac{\alpha-q_1-c}{2}-c}{2} \\ q_2 &= \frac{\alpha-q_1-c}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} q_1 &= \frac{2\alpha-\alpha+q_1+c-2c}{4} \\ q_2 &= \frac{\alpha-q_1-c}{2} \end{cases}$$

La première équation donne : $4q_1 = 2\alpha - \alpha + q_1 + c - 2c \Longleftrightarrow q_1^* = \frac{\alpha-c}{3}$
Substituant ce résultat dans la seconde équation, on trouve : $q_2^* = \frac{\alpha-q_1^*-c}{2}$, soit $q_2^* = \frac{\alpha-\frac{\alpha-c}{3}-c}{2} = \frac{3\alpha-\alpha+c-3c}{6} = \frac{2\alpha-2c}{6} = \frac{\alpha-c}{3}$

4. Supposons que N_2 met en place une subvention unitaire d'un montant s. Donnez le nouvel équilibre de Nash.

La mise en place de la subvention unitaire (i.e. par unité du bien produit) dans N_2 modifie la fonction de profit de la firme F_2. La fonction de profit de F_1 reste inchangée, de même que sa fonction de meilleure réponse : $q_1 = \varphi_1(q_2) = \dfrac{\alpha - q_2 - c}{2}$.
La fonction de meilleure réponse de F_2 (le montant total de la subvention étant $s \times q_2$) :

$$q_2 = \varphi_2(q_1) = \arg\max_{q_2}\{\pi_2(q_1, q_2) = (\alpha - q_1 - c)q_2 - q_2^2 + sq_2\}$$

La condition d'optimalité de 1^{er} ordre est : $\pi_2'(q_2) = 0 \Longleftrightarrow (\alpha - q_1 - c + s) - 2q_2 = 0$ soit $q_2 = \varphi_2(q_1) = \dfrac{\alpha - q_1 - c + s}{2}$
Les deux firmes jouant leur meilleure réponse, le nouvel équilibre de Cournot Nash est :

$$\begin{cases} q_1 &= \frac{\alpha-q_2-c}{2} \\ q_2 &= \frac{\alpha-q_1-c+s}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} q_1 &= \frac{\alpha-\frac{\alpha-q_1-c+s}{2}-c}{2} \\ q_2 &= \frac{\alpha-q_1-c+s}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} q_1 &= \frac{2\alpha-\alpha+q_1+c-s-2c}{4} \\ q_2 &= \frac{\alpha-q_1-c+s}{2} \end{cases}$$

La première équation donne : $4q_1 = \alpha + q_1 - s - c$, soit $q_1^* = \frac{\alpha-c-s}{3}$
Substituant ce résultat dans la seconde équation, on trouve : $q_2^* = \frac{\alpha-q_1^*-c+s}{2} = \frac{3\alpha-\alpha+c+s-3c+3s}{6} = \frac{2\alpha-2c+4s}{6} = \frac{\alpha-c+2s}{3}$

5. En utilisant votre cours, explicitez la politique mise en place par N_2 et ses conséquences. Justifiez

- **En l'absence de la politique de subvention**, le prix d'équilibre de marché est :
$p^* = \alpha - q_1^* - q_2^* = \alpha - \frac{\alpha-c}{3} - \frac{\alpha-c}{3} = \frac{3\alpha-\alpha-\alpha+c+c}{3} = \frac{\alpha+2c}{3}$
Le profit de chacune des firmes à l'équilibre est :
$\forall i \in \{1, 2\}, \pi_i(q_i^*) = p^*q_i^* - cq_i^* = (p^* - c)q_i^* = (\frac{\alpha+2c}{3} - c)(\frac{\alpha-c}{3}) = (\frac{\alpha-c}{3})^2 = \frac{(\alpha-c)^2}{9}$

- **Avec la politique de subvention**, le prix d'équilibre de marché est :
$p^* = \alpha - q_1^* - q_2^* = \alpha - \frac{\alpha-c-s}{3} - \frac{\alpha-c+2s}{3} = \frac{3\alpha-\alpha-\alpha+c+c+s-2s}{3} = \frac{\alpha+2c-s}{3}$
Cette fois-ci, les profits des 2 firmes sont différents.
Pour la firme 1 : $\pi_1(q_1^*) = p^*q_1^* - cq_1^* = (p^* - c)q_1^* = (\frac{\alpha+2c-s}{3} - \frac{3c}{3})(\frac{\alpha-c-s}{3}) = \frac{(\alpha-c-s)^2}{9}$
Pour la firme 2 : $\pi_2(q_2^*) = p^*q_2^* - cq_2^* + sq_2^* = (p^* - c + s)q_2^* = (\frac{\alpha+2c-s}{3} + \frac{-3c+3s}{3})(\frac{\alpha-c+2s}{3}) = \frac{(\alpha-c+2s)^2}{9}$

Suite question 5 à la page suivante

La nation N_2 choisit le montant de la subvention s de facon à maximiser la différence entre le profit de la firme $\frac{(\alpha-c+2s)^2}{9}$, et le montant total de la subvention, $sq_2^* = s \times \frac{\alpha-c+2s}{3}$:
$h(s) = \frac{(\alpha-c+2s)^2}{9} - s\left(\frac{\alpha-c+2s}{3}\right) = \frac{\alpha-c+2s}{3}\left(\frac{\alpha-c+2s}{3} - s\right) = \left(\frac{\alpha-c+2s}{3}\right)\left(\frac{\alpha-c-s}{3}\right)$
On cherche $s^* \in \arg\max_s\{h(s) = \left(\frac{\alpha-c+2s}{3}\right)\left(\frac{\alpha-c-s}{3}\right)\}$
La condition d'optimalité de 1^{er} ordre : $h^{'}(s) = 0 \iff \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha-c-s}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-c+2s}{3}\right) = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha-c-s}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-c+2s}{3}\right) = 0 &\iff 2(\alpha-c-s) - (\alpha-c+2s) = 0 \\
&\iff 2\alpha - 2c - 2s - \alpha + c - 2s = 0 \\
&\iff 2\alpha - 2c - \alpha + c = 4s \\
&\iff s^* = \frac{\alpha-c}{4}
\end{aligned}$$

La condition d'optimalité de 2^{nd} ordre : $h^{''}(s) = -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{4}{9} < 0$: la fonction h est strictement concave en s.
Une telle subvention constitue une distortion de la concurrence du point de vue des règles du commerce international. Pour cette raison, la nation N_2 doit prélever un impôt de montant équivalent au montant de la subvention totale octroyée à F_2.
Soit $A(s)$ le montant de cet impôt : $A(s) = s \times \frac{\alpha-c+2s}{3}$
$A(s^*) = \left(\frac{\alpha-c}{4}\right)\left(\frac{\alpha-c+\frac{\alpha-c}{2}}{3}\right) = \left(\frac{\alpha-c}{4}\right)\left(\frac{2\alpha-2c+\alpha-c}{6}\right) = \frac{(\alpha-c)^2}{8}$
Le profit de F_2 à l'équilibre s'écrit (on doit soustraire l'impôt à payer par F_2 :

$$\begin{aligned}
\frac{(\alpha-c+2s^*)^2}{9} - A(s^*) &= \frac{(\alpha-c+\frac{\alpha-c}{2})^2}{9} - \frac{(\alpha-c)^2}{8} \\
&= \frac{(\frac{3\alpha-3c}{2})^2}{9} - \frac{(\alpha-c)^2}{8} \\
&= \frac{9(\frac{\alpha-c}{2})^2}{9} - \frac{(\alpha-c)^2}{8} \\
&= \frac{(\alpha-c)^2}{4} - \frac{(\alpha-c)^2}{8} \\
&= \frac{(\alpha-c)^2}{8}
\end{aligned}$$

Le profit de F_2 après subvention, $\frac{(\alpha-c)^2}{8}$, est supérieur à celui obtenu sans la subvention, $\frac{(\alpha-c)^2}{9}$. La subvention a par ailleurs permis une baisse du prix d'équilibre : en effet, le prix d'équilibre après subvention est :
$p^* = \frac{\alpha+2c-s^*}{3} = \frac{\frac{4\alpha+8c}{4} - \frac{\alpha-c}{4}}{3} = \frac{3\alpha+9c}{12} = \frac{\alpha+3c}{4}$
Avant subvention, le prix était de $\frac{\alpha+2c}{3}$.
$\frac{\alpha+2c}{3} - \frac{\alpha+3c}{4} = \frac{4\alpha+8c-3\alpha-9c}{12} = \frac{\alpha-c}{12} > 0$

En définitive, la mise en place de la politique de subvention dans N_2 i) augmente le profit de F_2, ii) est neutre pour l'Etat (car il récupère en impôt exactement le montant déboursé en subvention), iii) fait baisser le prix du bien. Cette mesure ameliore donc le surplus collectif au sein de N_2.

Exercice 2 (TD)

Un même bien est vendu sur deux îles. L'île 1 est composée de k_1 entreprises identiques ayant chacune une fonction de coût total :

$$C_1(y_1) = \frac{1}{2}y_1^2$$

où y_1 est la production d'une entreprise. La fonction de demande des consommateurs sur cette île est $D_1(p_1) = n_1(1-p_1)$, où p_1 est le prix du bien sur l'île 1 et $n_1 > 0$ est un paramètre positif. L'île 2 est composée de k_2 entreprises identiques ayant chacune une fonction de coût total :

$$C_2(y_2) = \frac{1}{2}y_2$$

où y_2 est la production d'une entreprise. La fonction de demande des consommateurs sur cette deuxième île est $D_2(p_2) = n_2(1-p_2)$, où p_2 est le prix du bien sur l'île 2 et $n_2 > 0$ est aussi un paramètre positif.

1. Il n'y a pas de transport possible entre les îles et on a donc deux économies autarciques. Calculez pour chaque île le prix du bien à l'équilibre de marché en concurrence parfaite

A l'équilibre de marché en concurrence pure et parfaite, le prix est égal au coût marginal, et l'offre totale des biens est égale à la demande totale des biens.
- **Ile 1** : $C_1(y_1) = \frac{1}{2}y_1^2$ et $D_1(p_1) = n_1(1-p_1)$
L'offre de la firme individuelle découle de l'égalisation du prix de marché au coût marginal :
$Cm_1(y_1) = C_1^{'}(y_1) = y_1$
$p_1 = Cm_1(y_1) \iff p_1 = y_1$, soit l'offre individelle : $y_1 = p_1$
Le seuil de fermeture est le prix de marché à partir duquel la firme consent à proposer son bien sur le marché.
Le coût variable moyen est : $CVM_1(y_1) = C_1(y_1)/y_1 = \frac{1}{2}y_1$
$CVM_1(y_1) = Cm_1(y_1) \iff \frac{1}{2}y_1 = y_1$, soit $y_1^f = 0$.
Le seuil de fermeture correspond à $s_f = Cm_1(y_1^f) = 0$.
L'offre de la firme individuelle est : $y_1 = p_1$
L'offre totale des k_1 firmes identiques est : $O_1(p_1) = k_1 p_1$

$$\begin{aligned} O_1 = D_1 &\iff k_1p_1 = n_1(1-p_1) \\ &\iff k_1p_1 + n_1p_1 = n_1 \\ &\iff p_1^* = \frac{n_1}{k_1+n_1} \end{aligned}$$

Remarquer que l'offre de la firme individuelle $y_1^* = p_1^* = \frac{n_1}{k_1+n_1}$. Il s'en suit que la production d'équilibre de ce marché est $k_1y_1^* = \frac{k_1n_1}{k_1+n_1} = D_1(p_1^*)$

- **Ile 2** : $C_2(y_2) = \frac{1}{2}y_2$ et $D_2(p_2) = n_2(1-p_2)$
Ici, le coût marginal est constant : $Cm_2(y_2) = \frac{1}{2}$, ce qui nous amène à distinguer différents cas :
a.) Si $p_2 > \frac{1}{2}$: c'est une aubaine pour la firme qui est incitée à produire une quantité infinie de biens (tant qu'il y a des facteurs de production disponibles). Cette situation est incompatible avec la notion de rareté des ressources, puisqu'une offre infinie, face à une demande finie ($D_2(p_2) = n_2(1-p_2)$) devrait ramener le prix vers 0, ce qui contredit l'hypothèse d'un prix $p_2 > \frac{1}{2}$. Il n'y a donc pas d'équilibre de marché possible avec $p_2 > \frac{1}{2}$
b.) Si $p_2 < \frac{1}{2}$: L'offre de la firme est nulle, puisque le seuil de fermeture des firmes de l'ile 2 est $s_f = \frac{1}{2}$. Il n'y a pas d'équilibre de marché possible avec $p_2 < \frac{1}{2}$
b.) Si $p_2 = \frac{1}{2}$: C'est la seule situation pour laquelle il existe un equilibre de marché : $p_2^* = Cm_2(y_2) = \frac{1}{2}$

2. À l'équilibre, calculez pour chaque île le surplus des consommateurs. Calculez le surplus collectif pour chaque île séparée.

Surplus des consommateurs
La demande de bien D_1 est linéaire en p_1. La demande inverse sera aussi linéaire. On peut donc utiliser la formule de calcul du surplus des consommateurs comme étant l'aire d'un triangle rectangle.
a.) **sur l'ile 1**
$D_1(p_1) = n_1(1-p_1) \iff p_1(D_1) = \frac{n_1 - D_1}{n_1}$
Le prix de réserve du consommateur est : $p_1^{\max} = p_1(0) = \frac{n_1 - 0}{n_1} = 1$
La production d'équilibre est : $D_1(p_1^*) = n_1(1-p_1^*) = n_1(1 - \frac{n_1}{k_1+n_1}) = n_1(\frac{k_1}{k_1+n_1})$
Cette production d'équilibre est la même trouvée dans la question 1
Le surplus des consommateurs, comme aire d'un triangle :

$$SC(p_1^*) = \frac{D_1(p_1^*)(p_1^{\max} - p_1^*)}{2} = \frac{1}{2}\frac{n_1 k_1}{k_1+n_1}\left(1 - \frac{n_1}{k_1+n_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{n_1 k_1}{k_1+n_1}\left(\frac{k_1}{k_1+n_1}\right)$$

$$SC(p_1^*) = \frac{1}{2}\frac{n_1 k_1^2}{(k_1+n_1)^2}$$

b.) **sur l'ile 2**
Le prix d'équilibre est constant : $p_2^* = \frac{1}{2}$
La production d'équilibre s'obtient à partir de la fonction de demande :
$D_2(p_2^*) = D_2(1/2) = n_2(1-1/2) = \frac{n_2}{2}$
La demande inverse s'écrit :
$D_2(p_2) = n_2(1-p_2) \iff p_2(D_2) = \frac{n_2 - D_2}{n_2}$. Donc $p_2^{\max} = p_2(0) = 1$
Le surplus des consommateurs, comme aire d'un triangle :

$$SC(p_2^*) = SC(1/2) = \frac{D_2(p_2^*)(p_2^{\max} - p_2^*)}{2} = \frac{\frac{n_2}{2}(1-1/2)}{2} = \frac{n_2}{8}$$

Profit des producteurs
a.) **sur l'ile 1**
Pour une firme individuelle, le profit s'écrit : $\pi_1(y_1^*) = p_1^* y_1^* - C_1(y_1^*)$,
avec $p_1^* = \frac{n_1}{k_1+n_1} = y_1^*, C_1(y_1^*) = \frac{1}{2}(y_1^*)^2$

$$\pi_1(y_1^*) = \frac{n_1^2}{(k_1+n_1)^2} - \frac{1}{2}\frac{n_1^2}{(k_1+n_1)^2} = \frac{2n_1^2}{2(k_1+n_1)^2} - \frac{n_1^2}{2(k_1+n_1)^2} = \frac{n_1^2}{2(k_1+n_1)^2}$$

Comme les k_1 firmes sont identiques, leur profit total s'écrit : $\dfrac{k_1 n_1^2}{2(k_1+n_1)^2}$
b.) **sur l'ile 2**
Le prix d'équilibre (1/2) est égal au coût marginal (1/2) : le profit de la firme individuelle est donc nul. Idem pour le profit de toutes les entreprises.

Surplus collectif
Les entreprises n'ayant pas de coût fixe, le surplus collectif est la somme du surplus des consommateurs et du profit de toutes les firmes
a.) **sur l'ile 1** Notons W_1 ce surplus collectif

$$W_1 = SC(p_1^*) + \frac{k_1 n_1^2}{2(k_1+n_1)^2} = \frac{1}{2}\frac{n_1 k_1^2}{(k_1+n_1)^2} + \frac{k_1 n_1^2}{2(k_1+n_1)^2} = \frac{n_1 k_1^2 + k_1 n_1^2}{2(k_1+n_1)^2}$$

$$W_1 = \frac{n_1 k_1 (k_1+n_1)}{2(k_1+n_1)^2} = \frac{n_1 k_1}{2(k_1+n_1)}$$

b.) **sur l'ile 2** Notons W_2 ce surplus collectif
$W_2 = SC(p_2^*) + 0 = \dfrac{n_2}{8}$ (le profit des firmes de l'ile 2 est nul)