

Economie industrielle Correction de l'Interro n°2 - Groupe EGD

Exercice 1 (CM)

Soit un duopole de Cournot avec les firmes 1 et 2. La quantité fournie par la firme i est notée q_i . La fonction de demande inverse est :

$$p(Q) = \alpha - Q, Q \geq 0$$

où Q est la quantité totale produite par les deux firmes. Dans la suite, nous notons q_i la quantité produite par la firme $i \in \{1, 2\}$. L'entreprise 1 a une fonction de coût donnée par $c_1(q_1) = cq_1$ (connaissance commune). La fonction de coût de la firme 2 est une information privée. La fonction de coût est égale à $C_L \times q_2$ avec la probabilité ρ , et à $C_H \times q_2$ avec la probabilité $(1 - \rho)$, où $C_L < C_H$.

- Combien de fonctions de profit doit-on prendre en considération pour résoudre ce problème ? Expliquez

Pour la production d'une quantité q_2 , la firme 2 supporte le coût de production $c_2(q_2) = C_L \times q_2$ avec la probabilité ρ , et $c_2(q_2) = C_H \times q_2$ avec la probabilité $(1 - \rho)$.

Les deux entreprises se font la concurrence en quantité, et choisissent simultanément leurs quantités (en fonction de leur meilleure réponse). En raison du caractère aléatoire du régime du coût de la firme 2, nous devons considérer 3 fonctions de profit pour résoudre ce problème : celle de la firme 1, et les deux fonctions de profit de la firme 2, chacune correspondant à une fonction de coût.

- Pourquoi la firme 1 a-t-elle une fonction de profit espérée ?

La firme 1 a une fonction de profit espérée, car elle ne sait pas *a priori* si la firme 2 se positionne sur la fonction de coût $c_2(q_2) = C_L \times q_2$ ou celle de coût $c_2(q_2) = C_H \times q_2$.

- Donner les différentes fonctions de profits (espérées) des différentes firmes

Notons $q_{2,L}$ (respectivement $q_{2,H}$) la quantité décidée par la firme 2 selon qu'elle supporte le coût marginal C_L avec une probabilité (ρ) (respectivement le coût marginal C_H avec une probabilité $(1 - \rho)$)

- Firme 2

Elle maximise l'une des fonctions de profit suivantes :

$$\begin{cases} \pi_2(q_1; q_{2,L}) = (p(q_1 + q_{2,L}) - C_L) q_{2,L} = (\alpha - q_1 - q_{2,L} - C_L) q_{2,L} \\ \text{ou} \\ \pi_2(q_1; q_{2,H}) = (p(q_1 + q_{2,H}) - C_H) q_{2,H} = (\alpha - q_1 - q_{2,H} - C_H) q_{2,H} \end{cases}$$

et produit donc la quantité $q_{2,L}$ avec une probabilité ρ et la quantité $q_{2,H}$ avec une probabilité $(1 - \rho)$.

- Firme 1

Elle ignore si la firme 2 choisit la quantité $q_{2,L}$ ou $q_{2,H}$. Elle maximise donc une espérance de profit, qui tient compte de l'incertitude liée à sa méconnaissance du coût marginal supporté par sa concurrente :

$$\mathbb{E}\pi_1(q_1; q_{2,L}; q_{2,H}) = \rho \times p(q_1 + q_{2,L})q_1 + (1 - \rho) \times p(q_1 + q_{2,H})q_1 - cq_1$$

4. Donner les fonctions de meilleures réponses des firmes.

- **Firme 2**

$$\{q_{2,L}\} = \arg \max_{q_{2,L}} \{\pi_2(q_1; q_{2,L}) = (p(q_1 + q_{2,L}) - C_L) q_{2,L}\}$$

$$\begin{aligned}\pi_2(q_1; q_{2,L}) &= (p(q_1 + q_{2,L}) - C_L) q_{2,L} \\ &= (\alpha - q_1 - q_{2,L} - C_L) q_{2,L} \\ &= (\alpha - q_1 - C_L) q_{2,L} - q_{2,L}^2\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \pi_2(q_1; q_{2,L})}{\partial q_{2,L}} = \alpha - q_1 - C_L - 2q_{2,L}$$

La condition d'optimalité du 1er ordre nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_2(q_1; q_{2,L})}{\partial q_{2,L}} = 0 &\iff \alpha - q_1 - C_L - 2q_{2,L} = 0 \\ &\iff q_{2,L} = \frac{\alpha - q_1 - C_L}{2} = \mathcal{MR}_L(q_1)\end{aligned}$$

$\mathcal{MR}_L(q_1)$ est la meilleure réponse de la firme 2 lorsque son coût marginal est C_L . Par analogie, la meilleure réponse de la firme 2 lorsque son coût marginal est C_H s'écrit :

$$q_{2,H} = \frac{\alpha - q_1 - C_H}{2} = \mathcal{MR}_H(q_1)$$

- **Firme 1**

$$\{q_1\} = \arg \max_{q_1} \{\mathbb{E}\pi_1(q_1; q_{2,L}; q_{2,H})\}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\pi_1(q_1; q_{2,L}; q_{2,H}) &= \rho \cdot p(q_1 + q_{2,L})q_1 + (1 - \rho) \cdot p(q_1 + q_{2,H})q_1 - cq_1 \\ &= \rho \cdot (\alpha - q_1 - q_{2,L}) \cdot q_1 + (1 - \rho) \cdot (\alpha - q_1 - q_{2,H}) q_1 - cq_1 \\ &= q_1 [\rho \cdot (\alpha - q_1 - q_{2,L}) + (1 - \rho) \cdot (\alpha - q_1 - q_{2,H}) - c] \\ &= q_1 [\alpha - q_1 - \rho \cdot q_{2,L} - (1 - \rho)q_{2,H} - c] \\ &= [\alpha - \rho \cdot q_{2,L} - (1 - \rho)q_{2,H} - c] q_1 - q_1^2\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}\pi_1(q_1; q_{2,L}; q_{2,H})}{\partial q_1} = \alpha - \rho \cdot q_{2,L} - (1 - \rho)q_{2,H} - c - 2q_1$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}\pi_1(q_1; q_{2,L}; q_{2,H})}{\partial q_1} = 0 \iff \alpha - \rho \cdot q_{2,L} - (1 - \rho)q_{2,H} - c - 2q_1 = 0$$

$$\iff q_1 = \frac{\alpha - \rho \cdot q_{2,L} - (1 - \rho)q_{2,H} - c}{2} = \mathcal{MR}_1(q_{2,L}; q_{2,H})$$

5. **Question subsidiaire** (non posée dans l'interrogation) : Trouvez l'équilibre de Cournot-Nash de ce problème

Les deux firmes jouent leur meilleure réponse face à la meilleure réponse de leur concurrente :

$$\begin{cases} q_1 &= \frac{\alpha - \rho \cdot q_{2,L} - (1 - \rho)q_{2,H} - c}{2} = \mathcal{MR}_1(q_{2,L}; q_{2,H}) \\ q_{2,L} &= \frac{\alpha - q_1 - C_L}{2} = \mathcal{MR}_L(q_1) \\ q_{2,H} &= \frac{\alpha - q_1 - C_H}{2} = \mathcal{MR}_H(q_1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{2\alpha - \rho(\alpha - q_1 - C_L) - (1 - \rho)(\alpha - q_1 - C_H) - 2c}{4} \\ &= \frac{2\alpha - \alpha + q_1 + \rho C_L + (1 - \rho)C_H - 2c}{4} \\ &= \frac{\alpha + q_1 + \rho C_L + (1 - \rho)C_H - 2c}{4} \end{aligned}$$

On a : $4q_1 = \alpha + q_1 + \rho C_L + (1 - \rho)C_H - 2c$, soit $q_1^* = \frac{\alpha + \rho C_L + (1 - \rho)C_H - 2c}{3}$

$$\begin{aligned} q_{2,L}^* &= \frac{\alpha - q_1^* - C_L}{2} \\ &= \frac{3\alpha - [\alpha + \rho C_L + (1 - \rho)C_H - 2c] - 3C_L}{6} \\ &= \frac{2\alpha - (\rho + 3)C_L - (1 - \rho)C_H + 2c}{6} \\ q_{2,L}^* &= \frac{\alpha + c}{3} - \frac{(\rho + 3)C_L + (1 - \rho)C_H}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{2,H}^* &= \frac{\alpha - q_1^* - C_H}{2} \\ &= \frac{3\alpha - [\alpha + \rho C_L + (1 - \rho)C_H - 2c] - 3C_H}{6} \\ &= \frac{2\alpha - \rho C_L + (\rho - 4)C_H + 2c}{6} \\ q_{2,H}^* &= \frac{\alpha + c}{3} - \frac{\rho C_L - (\rho - 4)C_H}{6} \end{aligned}$$

$$q_{2,L}^* = \frac{\alpha + c}{3} - \frac{(\rho + 3)C_L + (1 - \rho)C_H}{6} \text{ et } q_{2,H}^* = \frac{\alpha + c}{3} - \frac{\rho C_L - (\rho - 4)C_H}{6}$$

Exercice 2 (TD)

On considère un monopole qui produit un bien de qualité variable. La qualité est mesurée par un indice s avec $s \in [0, 1]$. Produire un bien de qualité s en quantité y coûte $C(y, s) = sy$. La demande pour le bien produit par le monopole est exprimée par un consommateur représentatif dont le revenu est R et dont le niveau d'utilité est

$$U = q - \frac{q^2}{2s} + M$$

lorsqu'il consomme une quantité q de bien de qualité s au prix p et qu'il dispose d'un revenu résiduel $M = R - pq$ pour effectuer d'autres dépenses.

1. Pour un bien de prix p et de qualité s , déterminez la demande du consommateur $D(p, s)$.

Le consommateur (représentatif) décide de sa demande en maximisant son utilité sous contrainte du revenu. En substituant la contrainte budgétaire ($M = R - pq$) dans la fonction d'utilité, on a : $V(q) = q - \frac{q^2}{2s} + R - pq$

$$\{q^*\} = \arg \max_q \{V(q) = q - \frac{q^2}{2s} + R - pq\}$$

La condition d'optimalité du premier ordre : $V'(q) = 0 \iff 1 - \frac{q}{s} - p = 0$

Il s'en suit que $q^* = s(1 - p)$.

Comme $s \in [0, 1]$, $s \geq 0$. Donc $q^* \geq 0$ si $1 - p \geq 0$, soit $p \leq 1$

La demande du consommateur est donc :

$$D(p, s) = \begin{cases} s(1 - p) & \text{si } p \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La condition d'optimalité de second ordre est vérifiée : $V''(q) = -\frac{1}{s} < 0$ ce qui signifie que $V(q)$ est concave.

2. Supposons la qualité s fixée. Déterminez en fonction de s ,
(a) le prix $p(s)$ et la quantité $y(s)$ qui maximisent le profit du monopole.

Le monopole résout le programme :

$$\{(p^*, y^*)\} = \arg \max_{p, y} \{py - C(y, s)\} \text{ sous contrainte que } y = D(p, s)$$

programme équivalent au problème sans contrainte suivant :

$$\{p^*\} = \arg \max_p \{pD(p, s) - C(D(p, s), s)\}$$

sous réserve d'écrire ensuite que : $y^* = D(p^*, s) = s(1 - p^*)$ où p^* est déterminé précédemment

La fonction objectif du problème sans contrainte se réécrit :

$$W(p, s) = pD(p, s) - C(D(p, s), s) = p \times s(1 - p) - s \times s(1 - p)$$

$$W(p, s) = ps - p^2s - s^2 + s^2p$$

$$s \text{ étant fixé, } \frac{\partial W(p, s)}{\partial p} = s - 2ps + s^2$$

$$\text{La condition d'optimalité de premier ordre : } \frac{\partial W(p, s)}{\partial p} = 0 \iff s - 2ps + s^2 = 0,$$

$$\text{soit } p^*(s) = \frac{1 + s}{2}$$

$$\text{La condition d'optimalité de second ordre : } \frac{\partial^2 W(p, s)}{\partial p^2} = -2s \leq 0$$

$$\text{Finalement, } y^*(s) = D(p^*, s) = s(1 - p^*) = s(1 - \frac{1 + s}{2}) = \frac{s(1 - s)}{2}$$

(b) Donnez le profit d'équilibre.

$$\begin{aligned}\pi(y^*, p^*, s) &= p^*(s)y^*(s) - C(y^*(s), s) = p^*(s)y^*(s) - sy^*(s) \\ \pi(y^*, p^*, s) &= \frac{1+s}{2} \times \frac{s(1-s)}{2} - s \times \frac{s(1-s)}{2} = \frac{s(1-s)}{2} \left[\frac{1+s}{2} - s \right] \\ \pi(y^*, p^*, s) &= \frac{s(1-s)^2}{4}\end{aligned}$$

3. Supposons que le monopole peut choisir la qualité s . Déterminez la qualité s , le prix p et la quantité vendue q qui maximisent son profit.

La fonction de profit trouvée précédemment ne dépend que de la qualité s . On peut d'une part, trouver la valeur de la qualité qui maximise ce profit, puis d'autre part, déduire le prix et la quantité correspondant à cette qualité optimale à partir des résultats de la question 2.a)

$$\{s^*\} = \arg \max_s \left\{ \pi(s) = \frac{s(1-s)^2}{4} \right\}$$

La condition d'optimalité de premier ordre :

$$\begin{aligned}\pi'(s) = 0 &\iff \frac{1}{4} [(1-s)^2 - 2s(1-s)] = 0 \\ &\iff \frac{1}{4} (1-s) [1-s-2s] = 0 \\ &\iff \frac{1}{4} (1-s) (1-3s) = 0 \\ &\iff s = 1 \text{ ou } s = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

On a deux candidats potentiels pour l'optimum. La condition d'optimalité de second ordre : $\pi''(s) = \frac{1}{4} [-2(1-s) - 2(1-s) - 2s(-1)] = \frac{1}{4} (-2 + 2s - 2 + 2s + 2s)$

$$\pi''(s) = \frac{1}{4} (-4 + 6s) = \frac{1}{2} (3s - 2)$$

- Si $s > \frac{2}{3}$, alors $\pi''(s) > 0$

- Si $s < \frac{2}{3}$, alors $\pi''(s) < 0$

La seule solution vérifiant $\pi''(s) < 0$, qui est la condition suffisante d'existence d'un maximum, est donc $s^* = \frac{1}{3}$. On vérifie d'ailleurs que $\pi''(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{2} < 0$ et $\pi''(1) = \frac{1}{2} > 0$

Le prix et la quantité vendue maximisant le profit du monopole se déduisent aisément :

$$\begin{aligned}p^*(s) &= \frac{1+s}{2} \iff p^*(s^*) = \frac{1+s^*}{2} = \frac{1+\frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3} \\ y^*(s) &= \frac{s(1-s)}{2} \iff y^*(s^*) = \frac{s^*(1-s^*)}{2} = \frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})}{2} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{2}{9}}{2} = \frac{1}{9} \\ p^*(s^*) &= \frac{2}{3} \text{ et } y^*(s^*) = \frac{1}{9}\end{aligned}$$