Fonctions à deux variables
S'entraîner avec les dérivées partielles (Essai de correction)

Questions

Dans chacun des cas suivants, donner les expressions des utilités marginales : $u_{m,1}(x_1,x_2) = \dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $u_{m,2}(x_1,x_2) = \dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}$,
puis le rapport des utilités marginales $\text{TMS}_{2,1}(x_1,x_2) = \dfrac{u_{m,1}}{u_{m,2}}$

1. $u(x_1,x_2) = \log(x_1x_2)$

Rappel : La dérivée de $\log(f(x))$ est $\frac{f'(x)}{f(x)}$

Donc, $u_{m,1}(x_1,x_2) = \dfrac{x_2}{x_1x_2} = \dfrac{1}{x_1}$; $u_{m,2}(x_1,x_2) = \dfrac{x_1}{x_1x_2} = \dfrac{1}{x_2}$; $\text{TMS}_{2,1}(x_1,x_2) = \dfrac{x_2}{x_1}$

2. $u(x_1,x_2) = \log(x_1x_2^a),\ a > 0$

On applique la même règle que précédemment, et on trouve :

$$u_{m,1}(x_1,x_2) = \frac{x_2^a}{x_1x_2^a} = \frac{1}{x_1};\ u_{m,2}(x_1,x_2) = \frac{ax_1x_2^{a-1}}{x_1x_2^a} = \frac{ax_2^{-1}}{1} = \frac{a}{x_2};$$
$$\text{TMS}_{2,1}(x_1,x_2) = \frac{x_2}{a \cdot x_1}$$

3. $u(x_1,x_2) = x_1\log(a) + x_2^{1-a},\ a > 0$

$$u_{m,1}(x_1,x_2) = \log(a);\ u_{m,2}(x_1,x_2) = (1-a)x_2^{-a};\ \text{TMS}_{2,1}(x_1,x_2) = \frac{\log(a)\cdot x_2^a}{1-a}$$

4. $u(x_1,x_2) = x_1^a x_2^{1-a},\ a \in]0,1[$

$$u_{m,1}(x_1,x_2) = a \cdot x_1^{a-1}x_2^{1-a};\ u_{m,2}(x_1,x_2) = (1-a)x_1^a x_2^{-a};$$
$$\text{TMS}_{2,1}(x_1,x_2) = \frac{a\cdot x_1^{a-1}x_2^{1-a}}{(1-a)x_1^a x_2^{-a}} = \frac{a\cdot x_1^a \cdot x_1^{-1}\cdot x_2^1 \cdot x_2^{-a}}{(1-a)x_1^a x_2^{-a}} = \frac{a\cdot x_2}{(1-a)x_1}$$

5. $u(x_1,x_2) = x_1\exp(a) + x_2^{1/3},\ a \in \mathbb{R}$

$$u_{m,1}(x_1,x_2) = \exp(a);\ u_{m,2}(x_1,x_2) = \frac{1}{3}x_2^{-2/3};\ \text{TMS}_{2,1}(x_1,x_2) = 3\exp(a)x_2^{2/3}$$

6. $u(x_1,x_2) = x_1^a + \dfrac{1}{2}x_2$

$$u_{m,1}(x_1,x_2) = ax_1^{a-1};\ u_{m,2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2};\ \text{TMS}_{2,1}(x_1,x_2) = 2a\cdot x_1^{a-1}$$

7. $u(x_1, x_2) = \exp(ax_1 + (1-a)x_2),\ a \in]0, 1[$

Pour plus de visibilité, on peut réécrire la fonction d'utilité en appliquant la règle : $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha \times e^\beta$. Ainsi :
$u(x_1, x_2) = \exp(ax_1 + (1-a)x_2) = \exp(ax_1) \times \exp((1-a)x_2)$
On peut appliquer maintenant la règle concernant la dérivée de $g(x) = \exp(f(x))$ qui donne $g'(x) = f'(x) \cdot \exp(f(x))$. On a :

$$\begin{aligned} u_{m,1}(x_1, x_2) &= a \cdot \exp(ax_1) \cdot \exp((1-a)x_2) \\ u_{m,2}(x_1, x_2) &= (1-a) \cdot \exp(ax_1) \cdot \exp((1-a)x_2) \\ \text{TMS}_{2,1}(x_1, x_2) &= \frac{a}{1-a} \end{aligned}$$

8. $u(x_1, x_2) = x_1^a + x_2^{1-a},\ a \in]0, 1[$

$$u_{m,1}(x_1, x_2) = ax_1^{a-1};\ u_{m,2}(x_1, x_2) = (1-a)x_2^{-a};\ \text{TMS}_{2,1}(x_1, x_2) = \frac{a \cdot x_1^{a-1} \cdot x_2^a}{1-a}$$

9. $u(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^a,\ a > 0$

Cette fonction peut être réécrite : $u(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^a = \frac{x_1^a}{x_2^a} = x_1^a \cdot x_2^{-a}$

$$\begin{aligned} u_{m,1}(x_1, x_2) &= a \cdot x_1^{a-1} \cdot x_2^{-a};\ u_{m,2}(x_1, x_2) = -a \cdot x_1^a \cdot x_2^{-a-1} \\ \text{TMS}_{2,1}(x_1, x_2) &= \frac{a}{-a} \cdot \frac{x_1^{a-1}}{x_1^a} \cdot \frac{x_2^{-a}}{x_2^{-a-1}} = -\frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

Vous remarquerez que cette fonction ne respecte pas la proprieté de non-saturation (elle est decroissante en x_2)

10. $u(x_1, x_2) = (ax_1 - 1)^{1/2} + (x_2 - a)^{2/3},\ a \in]0, 1[$

Nous appliquons ici la formule de la dérivée pour une fonction élevée à la puissance n :

$$g(x) = (f(x))^n \iff g'(x) = n \cdot f'(x) \cdot (f(x))^{n-1}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} u_{m,1}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot (ax_1 - 1)^{-1/2} \\ u_{m,2}(x_1, x_2) &= \frac{2}{3} \cdot (x_2 - a)^{-1/3} \\ \text{TMS}_{2,1}(x_1, x_2) &= \frac{3a}{4} \cdot \frac{(ax_1 - 1)^{-1/2}}{(x_2 - a)^{-1/3}} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{(x_2 - a)^{1/3}}{(ax_1 - 1)^{1/2}} \end{aligned}$$