Microéconomie 2
Interrogation n°1

Le barême est donné à titre indicatif et est susceptible de changer.

Questions de cours

1. (1 pt) Définir en une phrase la productivité moyenne d'un facteur

> La productivité moyenne d'un facteur est la production obtenue par unité de ce facteur.

2. (1 pt) Remplir les pointillés avec les termes appropriés dans la phrase suivante : *Le rendement $\cdots$ (a) $\cdots$ mesure l'accroissement de la production, suite à l'accroissement dans les mêmes $\cdots$ (b) $\cdots$ de la quantité de tous les facteurs de production.*

> Le rendement **d'échelle** mesure l'accroissement de la production, suite à l'accroissement dans les mêmes **proportions** de la quantité de tous les facteurs de production

Exercice

NB : **Il sera tenu grand compte de la clarté de votre rédaction dans la notation**

Considérons un producteur d'un bien final en quantité y, qui utilise deux facteurs de production en quantités $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ respectivement. Le prix unitaire de chaque facteur est noté w_1 et w_2 respectivement. La technologie de production s'écrit :

$$y = x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2}$$

Le but du producteur est de résoudre le problème suivant :

$$(x_1^*, x_2^*) \in \underset{(x_1,x_2)}{\arg\min} \{w_1 x_1 + w_2 x_2\}$$
$$\text{sous la contrainte : } y = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$

1. (1 pt) Ecrire la condition d'optimalité du premier ordre de ce problème

> La condition d'optimalité du premier ordre : $TMST_{2,1}(x_1, x_2) = \frac{w_1}{w_2}$
> Le $TMST$ est le rapport des productivités marginales des facteurs :
> $TMST_{2,1}(x_1, x_2) = \frac{(1/2)x_1^{-1/2}x_2^{1/2}}{(1/2)x_1^{1/2}x_2^{-1/2}} = \frac{x_2}{x_1}$. Il vient donc que :
> $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{w_1}{w_2}$

2. (* pt) **Question facultative à bonus** Montrer, en résolvant ce problème, que la demande conditionnelle en facteurs de production s'écrit :

$$x_1^* = y \cdot \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1/2} \quad \text{et } x_2^* = y \cdot \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1/2}$$

et que le coût total associé s'écrit : $C(y) = 2\,(w_1 \cdot w_2)^{1/2}\, y$

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} &= \frac{w_1}{w_2} \\ y &= x_1^{1/2} x_2^{1/2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 &= \frac{w_1}{w_2} x_1 \\ y &= x_1^{1/2} x_2^{1/2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 &= \frac{w_1}{w_2} x_1 & \textbf{(1)} \\ y &= x_1^{1/2} \left(\frac{w_1}{w_2} x_1\right)^{1/2} & \textbf{(2)} \end{cases}$$

$\textbf{(2)} \iff x_1 \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1/2} = y \iff x_1^* = y \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1/2}$

$\textbf{(1)} \iff x_2^* = \frac{w_1}{w_2} x_1^* = \frac{w_1}{w_2} \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1/2} \times y = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1/2} \cdot y \quad \blacksquare$

Le coût total s'écrit alors :

$C(y) = w_1 \cdot x_1^* + w_2 \cdot x_2^* = w_1 \cdot y \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1/2} + w_2 \cdot y \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1/2} = 2\left(w_1 \cdot w_2\right)^{1/2} \times y$

3. (2 pt) Montrer, en résolvant ce problème, que la demande conditionnelle en facteurs de production s'écrit :

$$x_1^* = y \quad \text{et} \quad x_2^* = y$$

lorsque $w_1 = 1$ et $w_2 = 1$

Résolution évidente, si on reprend la démarche de la question précédente, en remplaçant w_1 par 1 et w_2 par 1.

4. (1 pt) Montrer que la fonction de coût total de ce producteur s'écrit : $C(y) = 2y$, lorsque $w_1 = 1$ et $w_2 = 1$

Evident !

5. (1 pt) Quelles sont les quantités x_1^* et x_2^* de facteurs choisies par le producteur s'il décide de produire $y = 9$, sachant que les prix des facteurs sont toujours $w_1 = 1$ et $w_2 = 1$?

Lorsque $w_1 = 1$ et $w_2 = 1$, on a : $x_1^* = x_2^* = y$. Donc si $y = 9$, alors $x_1^* = x_2^* = 9$

6. (2 pt) A partir du résultat de la question 4), donner l'expression des fonctions de coût moyen CM et de coût marginal Cm

On a : $C(y) = 2y$

$$CM(y) = \frac{C(y)}{y} = 2$$
$$Cm(y) = \frac{\partial C(y)}{\partial y} = 2$$

7. (1 pt) Suite à un changement de technologie, la fonction de coût total de ce producteur est passée à $C(y) = y^2$. Donner la fonction d'offre de court terme de la firme

On a : $C(y) = y^2$, donc $CVM(y) = y$ et $Cm(y) = 2y$. Le seuil de fermeture vaut $p_f = Cm(0) = 0$.
L'offre de la firme provient de la condition d'optimalité de la maximisation du profit du producteur :
$p = Cm(y) \iff p = 2y$, soit $y = \frac{1}{2}p$. Il vient que l'offre de court terme de la firme s'écrit :

$$y(p) = \begin{cases} \frac{1}{2}p & \text{si } p \geq p_f = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$